2. Il ruolo della matematica nella formazione di base

Gianfranco Arrigo

The article is a reflection on the important role that mathematics has to play in the education of young people at the obligatoty school. Similarly, the author portrays an image of mathematics, different from the one most people hold: a dry and harsh subject. In juxtaposition, mathematics is here described as a discipline, certainly exacting, though stimulating and leading to the development of creativity among young students.

Una situazione difficile

In questi tempi di recessione economica e di tagli alla spesa pubblica tornano a galla vecchi discorsi riguardanti la scuola (che costerebbe troppo, che non starebbe al passo con i tempi,…) e di conseguenza la liceità (o convenienza) di continuare a promuovere tale o tal altra disciplina. «Se s'ha da tagliare, si tagli» e la matematica pare sia nel mirino dei risparmiatori. Per diverse ragioni. Prima di tutto perché occupa «molte» ore nell'orario settimanale (un po' meno dell'italiano, ma nettamente di più della geografia), dunque la matematica stessa ci insegna che se m>g, allora il taglio relativo 1/m è minore di 1/g. Ma questa è una povera ragione, nemmeno degna del più fantozziano dei funzionari statali. Vi sono ragioni più serie, eccome!

- La matematica dà fastidio a molta gente. La pratica di questa disciplina mette a nudo inesorabilmente i pregi e i difetti di ordine cognitivo degli alunni, indipendentemente dalla loro estrazione sociale. Così può capitare che il figlio dell'Onorevole abbia meno successo dell'ultimo profugo arrivato in classe.
- La matematica si è fatta una cattiva immagine nel grande pubblico. Immagine alimentata anche da grosse pecche della scuola che in parecchi casi ha contribuito a creare – e lo fa tuttora – prima una disaffezione nei giovani verso la disciplina, poi addirittura – in taluni casi – un sentimento di odio. Ciò succede quando è insegnata male, quando è sfruttata come strumento di selezione, quando addirittura viene proposta come punizione.
- La matematica (come ogni disciplina impegnativa) non è attrattiva. Gli idoli dei giovani li troviamo fra gli sportivi di élite, fra le rock-star, fra gli attori del cinema commerciale, ecc. Nessuno ammira Euclide, Euler, Gauss, Gödel,…, anzi nessuno ne ha mai sentito parlare, salvo forse quando questi nomi sono legati a determinati teoremi. Ma i teoremi pos-

sono resuscitare immagini spiacevoli. Già, i teoremi; da una parte l'espressione più alta del pensiero matematico, dall'altra la rovina dell'immagine della matematica a scuola.

- La matematica, in parte, è mal insegnata. L'errore più diffuso è proprio quello di voler far studiare i teoremi. Il che significa: mettere l'allievo nella necessità di dover riprodurre contenuti matematici ripuliti, ordinati, rigorosamente strutturati, ma che l'allievo stesso non ha mai vissuto. Quindi materia alla quale l'allievo non sa (perché non può) dare alcun senso. Questa è la matematica che si fa facilmente odiare, al pari di qualunque imposizione che venga dall'alto e che non si riesce a giustificare.
- L'insuccesso in matematica crea assuefazione. Capita non raramente di sentirsi dire da un allievo «Scusi prof, io di matematica non ho mai capito nulla: non se la prenda. Cercherò di fare il possibile per strappare una nota non troppo insufficiente». E succede anche di sentire personalità affermate del mondo «che conta» dire con sfrontatezza: «Io di matematica non ho mai capito niente».

Chiudiamo qui l'elenco per non cadere troppo nella depressione e cerchiamo di ragionare su questa situazione.

Usciamo dal tunnel

Propongo, per iniziare, una riflessione di Keith Devlin, grande divulgatore scientifico americano[1]. Egli sostiene (e il libro citato in nota ne dà in un certo senso la dimostrazione) che non esiste alcun «gene della matematica», nel senso di una sequenza specifica di DNA umano che conferisca l'abilità matematica a chi lo possieda. Devlin ha prodotto una sottile riflessione sulla predisposizione che un individuo dovrebbe possedere per riuscire in matematica e sul perché molta gente non riesce a entrare nell'affascinante quanto culturalmente importante mondo della matematica. La tesi di fondo di Devlin può stupire: la predisposizione per riuscire in matematica è la stessa che necessita per imparare un linguaggio. In altri termini, chi possiede una lingua al punto tale da saperla usare «per spettegolare» (sic!) possiede anche le doti necessarie per imparare la matematica. E allora – si dirà – perché al mondo vi sono molti pettegoli e pochi matematici? Ottima domanda, tutt'altro che facile. Devlin ha dedicato molto tempo all'indagine volta a ricercare i motivi di questo dato di fatto.

A sostegno della sua tesi l'autore dà un'interessante spiegazione del fatto che nei concorsi internazionali i bambini cinesi e giapponesi se la cavano sempre meglio degli americani e di molti loro coetanei dell'Europa occidentale. È ragionevole supporre che tra le cause che determinano questi risultati possano esserci la differenza culturale e la diversità dei sistemi scolastici. Secondo l'autore, però, una buona parte dei

1. Professore alla *School of Science* del St. Mary's College di Moraga, California e *Senior Researcher* al *Center for the Study of Language and Information* della Standford University. Si fa riferimento in particolare al libro di Keith Devlin – Il gene della matematica / Per scoprire il matematico (nascosto) in ognuno di noi – Longanesi & C., Milano, 2002. Questo volume è stato recensito sul BDM 45, dicembre 2002, pag. 108.

fattori determinanti si ritrova proprio nel linguaggio. Per i bambini orientali, fare aritmetica – in particolare imparare le tabelline – è in effetti più facile, perché nella loro lingua le parole che indicano i numeri sono molto più brevi e più semplici: in genere si tratta di monosillabi, come per esempio *si* per 4 e *qi* per 7. Inoltre le regole grammaticali usate per costruire i termini che denotano i numeri sono molto più semplici che in inglese o nelle altre lingue europee. Per esempio, in cinese, per indicare i numeri oltre il dieci, si procede così: 11 è *dieci uno*, 12 *dieci due*, 13 *dieci tre* e così via fino a 20 che è *due dieci*, 21 *due dieci uno*, 22 *due dieci due*, eccetera. Si pensi per esempio al povero bambino francese che 97 lo deve leggere *quatre-vingt-dix-sept* e a quello tedesco che deve dire *siebenundneunzig*.

Tutto ciò impedisce spesso ai bambini svantaggiati di costruirsi un «senso del numero», immagine importante e decisiva per la comprensione dell'aritmetica. Senza dare un senso ai numeri, il soggetto si limita ad apprendere acriticamente un certo numero di regole. Ciò facilita il nascere e lo svilupparsi dell'impressione – molto frequente – che la matematica sia una cosa «arida», «priva di senso», che occorre sopportare fin quando, conseguito un determinato titolo di studio, ci se ne può definitivamente liberare. Da quel momento ci si sente autorizzati a dire – purtroppo anche con un certo vanto – di non aver mai capito nulla di matematica. E invece non c'è proprio di che vantarsi, anzi…

Ma allora, perché ciò non avviene sempre? Una delle tante immagini proposte da Devlin – per dare almeno un'idea delle ragioni che stanno alla base dell'insuccesso – è quella dell'apprendimento musicale. Imparare a suonare uno strumento non è facile. Intanto occorre imparare un linguaggio (quello delle note), poi occorre impadronirsi delle tecniche fondamentali (per esempio le scale, le tonalità, gli accordi, le forme musicali,…), infine occorre parecchio esercizio. Quest'ultimo richiede una certa forza di volontà. Lo stimolo può essere dato dal grande desiderio di riuscire a suonare, di avvicinarsi a propri idoli (musicisti, interpreti, star internazionali,…). Le stesse tappe si possono intravedere nell'apprendimento della matematica, con una differenza: che per la matematica, in generale, manca la stimolazione, quella carica che dà la forza di volontà necessaria per superare i momenti di apprendimento delle tecniche e delle nozioni di base, cose importanti, queste ultime, perché senza un minimo di conoscenza e di abilità tecnica non si può fare matematica come non si può suonare uno strumento musicale, con un minimo di successo.

Da queste riflessioni – che sono solo un esempio fra i tanti esistenti – mettono in evidenza l'importanza dell'insegnamento scolastico della matematica e in particolare del delicato ruolo che devono assumere gli insegnanti: quello cioè di dare motivazione all'apprendimento dei loro allievi. Come fare?

Costruire il senso in matematica

Nella loro varietà, i contenuti matematici sono legati da relazioni essenziali che ne determinano il senso. Il matematico sa che un teorema isolato non ha un gran senso: lo acquista se viene messo in relazione con la teoria alla quale appartiene e nella quale acquista un significato e un'importanza che altrimenti non avrebbe. Tutti possono capire che un calcolo isolato, in sé, non ha senso, ma che lo stesso acquista significato quando è collocato in un contesto di risoluzione di un problema. Analogamente, una definizione –come tante che si fanno studiare a scuola – non ha senso, ma lo acquista quando la si vede agire, per esempio, nella dimostrazione di un teorema; anzi, meglio sarebbe se la definizione venisse aggiustata all'interno di una dimostrazione.

Detto con Vergnaud, i concetti matematici si dotano di significato a partire da una varietà di situazioni; ogni situazione non può essere analizzata usualmente con l'aiuto di un solo concetto, dato che intervengono vari di essi (Vergnaud, 1990). Qui considero importante richiamare l'attenzione degli insegnanti sull'opera di Imre Lakatos[2], «Dimostrazioni e confutazioni»[3],

Più che le mie parole, può servire uno stralcio di quest'opera.

Professore

Nella nostra ultima lezione avevamo fatto una congettura sui poliedri, cioè che per tutti i poliedri V–S+F=2, dove V è il numero dei vertici, S il numero degli spigoli e F il numero le facce. L'abbiamo controllata, ma non l'abbiamo ancora dimostrata. Qualcuno ha trovato una dimostrazione?

Studente Sigma

Io per primo devo ammettere che non sono ancora riuscito a escogitare una dimostrazione rigorosa per questo teorema... Tuttavia, dato che la sua verità è stata stabilita in tanti casi, non ci può essere dubbio che essa valga per tutti i solidi. La proposizione mi sembra dunque provata in modo soddisfacente. Ma se Lei ha una dimostrazione, per favore, ce la dica.

Professore

Sì, ne ho una. Consiste nel seguente esperimento mentale. (…)

[Il professore esegue la dimostrazione consistente nel passare dal poliedro (nel caso particolare un cubo) al suo grafo, togliendo una faccia al cubo (vedi figura 1) e proiettando su un piano; poi il grafo viene suddiviso in triangoli (vedi figura 2) e infine si verifica che levando ad uno ad uno i triangoli la somma V–S+F non cambia, cioè rimane uguale a 1.

2. Imre Lakatos, ungherese (1922-1974), frequenta il Real Gymnasium e poi all'Università di Debrecen studia filologia greca e latina e storia della matematica. Nel 1944 si laurea in matematica, fisica e filosofia all'Università di Debrecen. Traduce dall'inglese all'ungherese il famoso libro del suo connazionale Gyorgy Polya How to solve it (Come porre e risolvere un problema). Nel 1962 pubblica l'opera Infinite Regress and Foundations of Mathematics, nella quale rivendica per la filosofia della matematica un ruolo diverso da quello di mera indagine sui fondamenti. Tra il 1963 e il 1964 scrive l'opera «Proofs and Refutations» (Dimostrazioni e confutazioni) nella quale polemizza con il modo tradizionale di presentare e insegnare la matematica.
3. Pubblicato nel 1979 da Feltrinelli, Milano, il libro è purtroppo scomparso dal commercio. Gli interessati mi possono contattare: ne posseggo una copia fotostatica, gentilmente procuratami dall'amico Mario Barra.

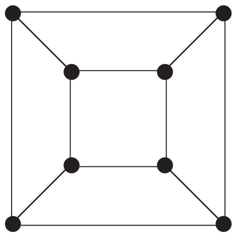

figura 1

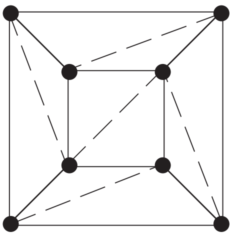

figura 2

Quando si giunge all'ultimo triangolo, si verifica facilmente che 3–3+1=1. E quindi il teorema sarebbe dimostrato. Sennonché…]

Studente Delta
Dovrebbe ora chiamarla teorema. Non ha più nulla di congetturale.

Studente Alfa
Sono perplesso. Capisco che questo esperimento può essere eseguito per un cubo o un tetraedro; ma come posso essere sicuro che si possa eseguire per ogni poliedro? Per esempio, è sicuro, Professore, che ogni poliedro, dopo che è stata asportata una faccia, può essere disteso sul piano della lavagna? Ho qualche dubbio sul suo primo passaggio.

Studente Beta
È sicuro anche che triangolando la figura piana così ottenuta si otterrà sempre una nuova faccia per ogni nuovo spigolo? Ho dei dubbi sul secondo passaggio.

Studente Gamma
È sicuro che vi siano solo due alternative – la scomparsa di uno spigolo oppure di due spigoli e un vertice – quando vengono asportati uno a uno i triangoli? I miei dubbi concernono il suo terzo passaggio.

Professore
Naturalmente non ne sono affatto sicuro.

Studente Alfa
Ma allora stiamo peggio di prima! Invece di una congettura ne abbiamo almeno tre! E Lei chiama tutto ciò «dimostrazione»!

Professore
Ammetto che con ragione il nome tradizionale di «dimostrazione» per questo esperimento mentale si può considerare un po' fuorviante. Non credo che esso riesca a stabilire la verità della congettura.

Studente Delta
A cosa serve allora? Cosa mai pensa Lei che dimostri una dimostrazione matematica?

Professore

È un quesito sottile cui cercheremo di rispondere in seguito. Fino a quel momento propongo di usare costantemente il termine tecnico, tradizionalmente accettato, di «dimostrazione» nel senso di esperimento mentale – o «quasi esperimento» –, che suggerisce una scomposizione della congettura originale in sottocongetture o lemmi, immergendola così in un corpo di conoscenze eventualmente molto distante. La nostra dimostrazione, per esempio, ha immerso la congettura originale sui cristalli – o, poniamo, sui solidi – nella teoria delle superfici di gomma. Descartes o Euler, i padri della congettura originale, di certo non se lo erano neppure sognato. (…)

Al di là del contenuto matematico e di una certa ricercatezza dei dialoghi (il linguaggio usato non è proprio lo stesso di quello che si usa per esempio in una scuola media) è importante cogliere lo spirito costruttivo col quale il professore e i suoi allievi ragionano. Nulla è dato per scontato, mai si sentirebbe dire «è così perché è così» e nemmeno «ecco come si dimostra il teorema: fra una settimana verificheremo se l'avete imparato». Gli studenti di Lakatos sono spinti costantemente a dare senso a ciò che stanno apprendendo.

Pensare matematicamente

La matematica è un vasto e complesso insieme di conoscenze organizzate deduttivamente: lo si può verificare aprendo a caso un qualsiasi libro serio di matematica. Ma imparare la matematica non significa assorbire acriticamente questo complesso di conoscenze, bensì entrare nella problematica che sta alla base della teoria descritta e agire in una situazione appartenente a un campo concettuale di questa teoria. Questo termine va inteso nel senso dato da Gérard Vergnaud. Cioè, un campo concettuale è un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure e rappresentazioni di tipo diverso ma in stretta connessione tra loro (Vergnaud, 1990).

Insegnare la matematica deve quindi assumere il significato di condurre gli allievi attraverso un'avvincente avventura intellettuale, con lo scopo di perfezionare le loro capacità di pensare matematicamente e quindi di risolvere problemi. L'attività matematica è una sorta di contrappunto tra immaginazione (intuizione) e ragionamento logico. L'uno e l'altro di questi aspetti fondamentali del «fare matematica» devono intrecciarsi continuamente, mai essere divisi. L'analisi e la sintesi devono combinarsi armoniosamente con l'intuizione e l'invenzione; l'attività di induzione deve trovare coronamento nel ragionamento deduttivo; quest'ultimo, a sua volta deve stimolare una nuova fase di induzione. Questo, per me, significa, in poche parole, pensiero matematico. E così dovrebbe essere praticato in tutte le aule, dalla scuola di base all'università.

Matematica e cultura

Anche se in molti ambienti della nostra società (purtroppo anche nella scuola), si tende a distinguere tra matematica (vista come disciplina tecnica, arida e chiusa) e cultura (alla quale, però, senza alcuna esitazione si associano certe creazioni dette «artistiche» o certe scienze… poco – o per nulla – scientifiche), è assolutamente indiscutibile –e occorre sottolinearlo con tutta la forza – che la matematica è una componente culturale essenziale che ha segnato e indirizzato la storia del pensiero umano.

E che dire dello stretto rapporto tra matematica e poesia? Lasciamo spazio a qualche citazione.

Karl Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco

«Nessun matematico può essere un vero matematico se non è in parte anche un poeta».

Frederick Pollock (1845-1937), giurista inglese

«Che la Scienza e la Poesia siano sorelle non è un vero segreto per chi le conosce, ma rimane un mistero e un ostacolo insormontabile per molti, al punto che, nelle più astratte, formali e controintuitive branche della ricerca scientifica un'elevata immaginazione, simile a quella del poeta, è spesso più utile di un lavoro perseverante».

Gustave Flaubert (1821-1880), romanziere francese

«La poesia è una scienza esatta come la Geometria».

Betrand Russell (1872-1970), filosofo e matematico inglese

«Il vero spirito dell'estasi, l'esaltazione, la sensazione di essere qualcosa di più di un semplice uomo, che è la più importante pietra di paragone, va ricercata tanto nella matematica quanto nella poesia».

E infine, citiamo una delle terzine di Dante Alighieri (Paradiso, canto XXVIII, 91-93), versi che ci sono familiari grazie anche all'opera di Bruno D'Amore (D'Amore, 2001)…

«L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar delli scacchi s'inmilla».

… versi nei quali Dante sembra ricorrere alla serie geometrica di ragione 1000 per indicare il numero di angeli che nascono ogni secondo.

Ma potremmo continuare citando le importanti relazioni tra matematica e musica – pensando per esempio a Mozart – e tra la matematica e le arti figurative con riferimenti che possono partire da Piero della Francesca e arrivare a M. C. Escher e, perché no, a Oscar Reuterswärd.

Matematica e mondo post-industriale

La civiltà tecnologica risparmia all'uomo la maggior parte (almeno) dei lavori di routine.

La maggior parte delle attività umane poggia sia sul pensiero razionale sia sulle relazioni umane, artistiche, sportive,…

È difficile prevedere il futuro ma sicuramente l'attuale tendenza – richiesta di capacità razionali piuttosto che di abilità ripetitive – si rafforzerà almeno in un futuro prossimo.

Parallelamente, a meno di cataclismi non augurabili, sarà sempre più importante una buona formazione matematica… nella matematica «di oggi», nella quale non ha assolutamente senso distinguere tra «pura» e «applicata», come pretendeva fare in uno scritto polemico un professore di elettrotecnica che nel non lontano 1993 si esprimeva così:

«Da circa tre decenni, prima in Francia (sotto la spinta dei bourbakisti), poi in Belgio e infine nella Svizzera romanda, a matematica, si insegna ciò che di più astratto, di più verbale, di più inutile si possa trovare (…). La chiamano «La Matematica» e toglie lo spazio necessario all'insegnamento di quei contenuti matematici che per molto tempo hanno dato prova di essere utili agli ingegneri, agli economisti, ai fisici, ecc. (…)».

Chi conosce un po' la storia della matematica non può trattenere le risa davanti a tanta goffaggine. È comunque demenziale voler dipingere la teoria matematica con aggettivi del tipo «astratto, verbale, inutile». Quante volte, nel corso dei secoli, si sono dati giudizi di questo tipo a teorie matematiche rivelatesi poi essenziali in applicazioni tecnologiche. Già che siamo nel campo dell'elettrotecnica, può essere utile ricordare che i numeri complessi, furono prima usati per bisogni puramente matematici (per esempio da Leonhard Euler nel XVIII secolo) e poi a poco a poco accettati e definiti (grazie anche all'opera di Gauss, circa un secolo dopo), molto prima che gli ingegneri li sfruttassero per cercare di costruire modelli matematici dei circuiti elettrici.

E che dire delle geometrie non euclidee? Puro esercizio di logica, all'inizio essenzialmente «astratto, verbale, inutile», ma qualche tempo dopo servite meravigliosamente ad Einstein per la sua rivoluzionaria teoria della relatività, così come ai moderni navigatori e aviatori.

Matematica e formazione civica

In ogni stato democratico, nel quale (almeno nelle intenzioni) si riconosce la sovranità al popolo, diventa sempre più importante formare il futuro cittadino – quindi l'allievo della scuola obbligatoria – alla luce del pensiero razionale e di una cultura matematica di base.

Basta riflettere sulle numerose votazioni nelle quali si è chiamati ad esprimersi su questioni tecnologiche, tecnocratiche, economiche e via dicendo…

Qui occorre citare l'abuso dei dati statistici che abili personaggi fanno con estrema disinvoltura. A livello elementare usando, a seconda della convenienza, dati assoluti o dati relativi. È evidente che al cittadino medio un risparmio (o una spesa) di 3 milioni fa colpo; ma se questa somma viene confrontata a un totale di un miliardo, si ridimesiona fortemente: è come dire 3 franchi su 1000. Chi è quel padre di famiglia che negherebbe 3 franchi al proprio figlio solo per ridurre le spese da 1000 franchi a 997 franchi?

A livello più raffinato, gli abusi si operano nei processi di inferenza statistica. Le previsioni, le proiezioni, le indagini di mercato o di opinione, anche le più attendibili, poggiano sempre su un rischio ben definito in termini di probabilità. Per esempio, se si annuncia per il giorno dopo una temperatura di 14 gradi, con un errore di al massimo 1 grado, in una situazione statisticamente normale significa che la probabilità che la reale temperatura si riveli effettivamente tra 13 e 15 gradi è circa del 68%. Che cosa significa la probabilità 0,68? Si supponga che la propria vita dipenda dall'estrazione di una pallina bianca, sapendo che nell'urna si trovano 68 palline bianche e 32 palline nere: con che animo vi accingereste a pescare la pallina?

Un capitolo interessante nell'ambito dell'educazione civica è quello relativo ai sistemi elettorali. Qui la matematica gioca il suo ruolo e grazie al modello matematico è possibile capire meglio l'influenza sui risultati (in termini di assegnazione di seggi in parlamento) dei diversi parametri che vengono definiti nelle leggi elettorali. Così, per esempio, ci si può rendere conto che non sempre un sistema proporzionale è migliore di uno maggioritario e viceversa. Per capire questi meccanismi, occorre conoscere un po' di matematica: poca, in vero, se si tratta di nozioni e tecniche; molta, se si tratta di capacità ragionative.

Finale con citazione

«*La migliore tecnica di sopravvivenza che possiamo offrire ai nostri bambini è la capacità di acquisire conoscenze e competenze nuove. Parte di quell'arsenale di capacità di sopravvivenza è costituita proprio da una comprensione generale della matematica e dall'abilità di acquisire capacità matematiche specifiche nel momento in cui si rendono necessarie*».

K. Devlin

Bibliografia

B. D'Amore
Elementi di didattica della matematica, Pitagora editrice, Bologna, 1999.

B. D'Amore
P*iù che 'l doppiar delli scacchi s'inmilla*, Pitagora editrice, Bologna, 2001.

G. Vergnaud
La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques, 10, 1990, Ed. La Pensée sauvage, Grenoble.

David Wells
Personaggi e paradossi della matematica, Arnoldo Mondadori, Milano, 2000.

G. Mainini
Matematica elettorale, BDM 45, UIM, Bellinzona, dicembre 2002.